PART3 ベクトルの実数倍，ベクトルの演算

要点 ① ベクトルの実数倍

$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，「　　」を次のように定義する。

[1] $k>0$ のとき　　$k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

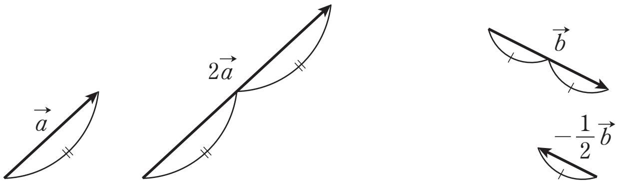
特に　$1\vec{a}=\vec{a}$

[2] $k<0$ のとき　　$k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

特に　$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

[3] $k=0$ のとき　　$k\vec{a}=$

例



$\vec{a}=\vec{0}$ のときは，任意の実数 k に対して

$k\vec{a}=\vec{0}$

と定義する。すなわち，任意の実数 k に対して $k\vec{0}=\vec{0}$ である。

※上記の定義により，$(-k)\vec{a}=-(k\vec{a})$ が成り立つから，これらを単に $-k\vec{a}$ と書く。

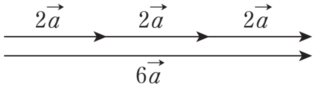
要点 ② ベクトルの実数倍の性質と演算

ベクトルの実数倍について，次の性質が成り立つ。

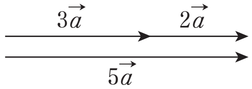
ベクトルの実数倍の性質

k，l を実数とする。

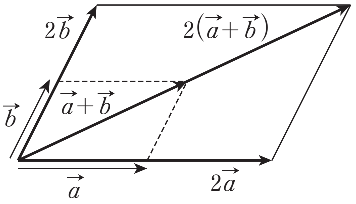
$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}=kl\vec{a}$　　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$



$3(2\vec{a})=6\vec{a}=(3\cdot2)\vec{a}$



$3\vec{a}+2\vec{a}=5\vec{a}=(3+2)\vec{a}$



$2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$

ベクトルの加法，減法，実数倍の計算においては，これまで学んだ性質により，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を文字 a，b と同じように扱うことができる。

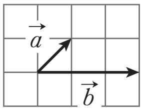
例　$2(\vec{a}+3\vec{b})+5(2\vec{a}-\vec{b})$

$=\ \ \vec{a}+\ \ \vec{b}+\ \ \ \vec{a}\ \ \ \ \vec{b}$

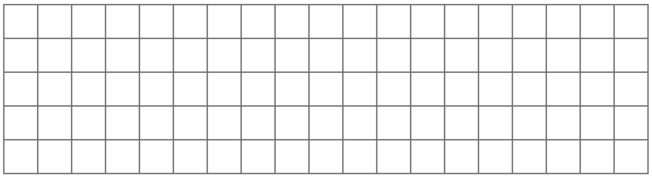
$=\ \ \ \ \ \ \ \ \vec{a}+\ \ \ \ \ \ \ \ \vec{b}$

$=12\vec{a}+\vec{b}$

3 (1) 右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。



(i) $2\vec{a}$　　(ii) $-\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　(iii) $3\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$



(2) 次の計算をせよ。

(i) $4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}$　　(ii) $\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}$　　(iii) $3(\vec{a}-4\vec{b})-2(\vec{a}-6\vec{b})$

(3) 次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$2\vec{x}+4\vec{a}=\vec{b}-\vec{x}$$

Point Pickup

ベクトルの実数倍

$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ の実数倍 $k\vec{a}$ について

向き	$k>0$ …… $\vec{a}$ と同じ向き	$k<0$ …… $\vec{a}$ と反対向き
大きさ	$k>0$ …… k 倍	$k<0$ …… $\lvert k\rvert=-k$ 倍

$0\vec{a}=\vec{0}$

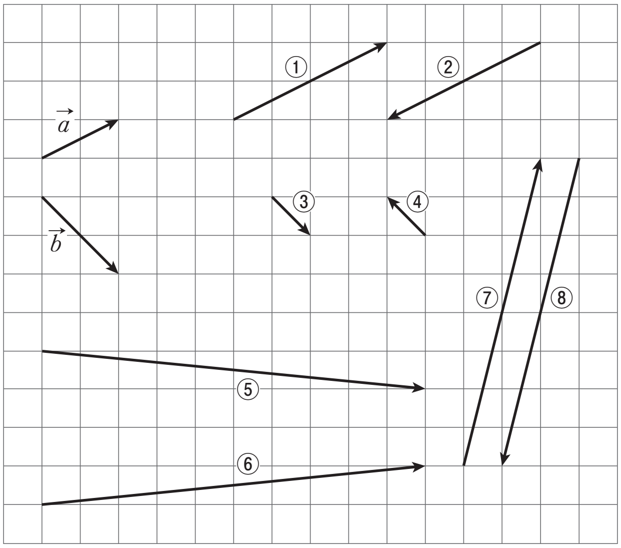
ベクトルの演算

ベクトルの性質から，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の式を，文字 a，b の式と同じように扱うことができる。

第 1 講 PART3 確認問題

図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを

それぞれ①～⑧のうちから選べ。



1 $2\vec{a}$ を表すベクトルは ア

2 $-\frac{1}{2}\vec{b}$ を表すベクトルは イ

3 $3\vec{a}+2\vec{b}$ を表すベクトルは ウ

次の計算をせよ。

4 $2\vec{a}+5\vec{a}-3\vec{a}=$ エ $\vec{a}$

5 $\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{a}-6\vec{b}=$ オ $\vec{a}-$ カ $\vec{b}$

6 $4(\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}+5\vec{b})=$ キ $\vec{a}+$ ク $\vec{b}$

次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

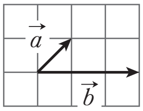
7 $4\vec{x}-3\vec{a}=-3\vec{x}-2\vec{b}$

$$\vec{x}=\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}\vec{a}-\frac{\text{サ}}{\text{シ}}\vec{b}$$

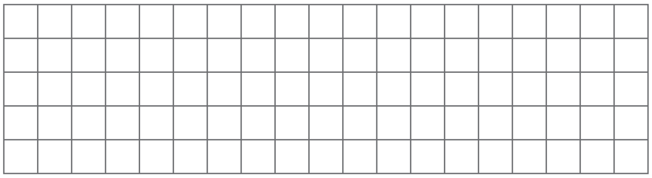
[MEMO]

PART3 ベクトルの実数倍，ベクトルの演算

3 (1) 右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。



(i) $2\vec{a}$　　(ii) $-\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　(iii) $3\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$



(2) 次の計算をせよ。

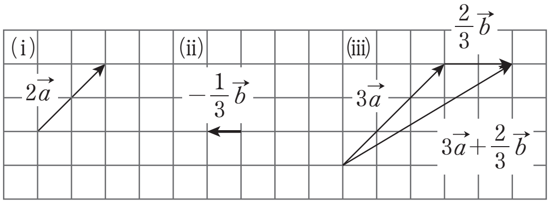
(i) $4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}$　　(ii) $\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}$　　(iii) $3(\vec{a}-4\vec{b})-2(\vec{a}-6\vec{b})$

(3) 次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$2\vec{x}+4\vec{a}=\vec{b}-\vec{x}$$

[解答]

(1)



(2) (i) $4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}=(4+3-5)\vec{a}=2\vec{a}$

(ii) $\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}=(1-3)\vec{a}+(-2-1)\vec{b}=-2\vec{a}-3\vec{b}$

(iii) $3(\vec{a}-4\vec{b})-2(\vec{a}-6\vec{b})=3\vec{a}-12\vec{b}-2\vec{a}+12\vec{b}=(3-2)\vec{a}+(-12+12)\vec{b}=\vec{a}$

(3) $2\vec{x}+4\vec{a}=\vec{b}-\vec{x}$　より　$2\vec{x}+\vec{x}=-4\vec{a}+\vec{b}$　　$3\vec{x}=-4\vec{a}+\vec{b}$

よって　$\vec{x}=-\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

第1講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$2\vec{a}$ は, $\vec{a}$ と向きが同じで, 大きさが2倍のベクトル。 [A]

[A]　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $k>0$ (k は実数)のとき, $k\vec{a}$ は, $\vec{a}$ と向きが同じで, 大きさが k 倍のベクトル。

2

[正解] イ：④

[解説]

$-\dfrac{1}{2}\vec{b}$ は, $\vec{b}$ と向きが反対で, 大きさが $\dfrac{1}{2}$ 倍のベクトル。 [B]

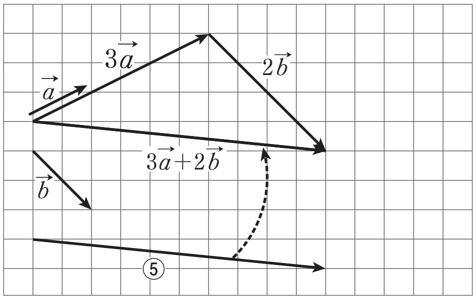
[B]　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $k<0$ (k は実数)のとき, $k\vec{a}$ は, $\vec{a}$ と向きが反対で, 大きさが $|k|$ 倍のベクトル。

3

[正解] ウ：⑤

[解説]

$3\vec{a}+2\vec{b}$ は, $3\vec{a}$ と $2\vec{b}$ を図示し, これらの和を求めればよい。 [C] [D]



[C]　$3\vec{a}$ の終点と, $2\vec{b}$ の始点を重ねる。

[D]　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $k>0$ (k は実数)のとき, $k\vec{a}$ は, $\vec{a}$ と向きが同じで, 大きさが k 倍のベクトル。

4

[正解] エ：4

[解説]

$$2\vec{a}+5\vec{a}-3\vec{a}=(2+5-3)\vec{a}$$ [E]

$$=4\vec{a}$$

[E]　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$ (k, l は実数)

5　**[正解]** オ：5，カ：3

[解説]

$$\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{a}-6\vec{b}=(1+4)\vec{a}+(3-6)\vec{b}$$ [F]

$$=\boldsymbol{5\vec{a}-3\vec{b}}$$

[F]　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$（$k$，$l$ は実数）

6　**[正解]** キ：3，ク：3

[解説]

$$4(\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}+5\vec{b})=4\vec{a}+8\vec{b}-\vec{a}-5\vec{b}$$ [G]

$$=(4-1)\vec{a}+(8-5)\vec{b}$$

$$=\boldsymbol{3\vec{a}+3\vec{b}}$$

[G]　$k(l\vec{a})=kl\vec{a}$
$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$
（k，l は実数）

7　**[正解]** ケ：3，コ：7，サ：2，シ：7

[解説]

$4\vec{x}-3\vec{a}=-3\vec{x}-2\vec{b}$ より

$$4\vec{x}+3\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}$$ [H]

$$7\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}$$

よって

$$\boldsymbol{\vec{x}=\frac{3}{7}\vec{a}-\frac{2}{7}\vec{b}}$$

[H]　ベクトルの性質から，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の式を，文字 a，b の式と同じように扱うことができる。